ISOMORFISMI DI GRAFI

1) *Es. n.4 del 12 luglio 2007*

Si dica, motivando la risposta, quali tra i seguenti grafi, G_1, G_2 e G_3, sono tra loro isomorfi e quali no.

$G_1 = (V_1, E_1)$ dove l'insieme dei vertici è

$$V_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

e l'insieme dei lati è

$$\begin{aligned} E_1 = \{ \ & \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \\ & \{c, d\}, \{b, d\}, \{d, e\}, \\ & \{d, f\}, \{d, g\}, \{e, f\}, \\ & \{f, g\}, \{e, g\} \ \}. \end{aligned}$$

$G_2 = (V_2, E_2)$ dove l'insieme dei vertici è

$$V_2 = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

e l'insieme dei lati è

$$\begin{aligned} E_2 = \{ \ & \{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \\ & \{D, E\}, \{E, F\}, \{F, A\}, \\ & \{A, G\}, \{B, G\}, \{C, G\}, \\ & \{D, G\}, \{E, G\} \ \}. \end{aligned}$$

$G_3 = (V_3, E_3)$ dove l'insieme dei vertici è

$$V_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

e l'insieme dei lati è

$$\begin{aligned} E_3 = \{ \ & \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \\ & \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \\ & \{1, 7\}, \{2, 7\}, \{3, 7\}, \\ & \{4, 7\}, \{5, 7\} \ \}. \end{aligned}$$

Soluzione

Osserviamo anzitutto che i tre grafi hanno lo stesso score

$$d = (2, 3, 3, 3, 3, 3, 5)$$

quindi ancora non possiamo concludere.

♣ Dimostriamo che $\boxed{G_1 \not\cong G_2}$ (G_1 non è isomorfo a G_2):

Primo modo:

Osserviamo anzitutto che il vertice di grado massimo in G_1 è d, mentre quello di grado massimo in G_2 è G, entrambi di grado 5.

Se esistesse un isomorfismo tra G_1 e G_2, necessariamente dovrebbe mandare d in G e indurrebbe un isomorfismo tra $G_1 - d$ e $G_2 - G$.

Ma $G_1 - d$ ha come vertici

$$\{a, b, c, e, f, g\}$$

e come lati

$$\begin{aligned} \{\ &\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \\ &\{e, f\}, \{f, g\}, \{e, g\}\ \} \end{aligned}$$

$G_1 - d$ è pertanto l'unione di due 3−cicli disgiunti di vertici $\{a, b, c\}$ e $\{e, f, g\}$, dunque è sconnesso.

Invece $G_2 - G$ ha come vertici

$$\{A, B, C, D, E, F\}$$

e l'insieme dei lati è

$$\begin{aligned} \{\ &\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \\ &\{D, E\}, \{E, F\}, \{F, A\}\ \} \end{aligned}$$

$G_2 - G$ è un ciclo di lunghezza 6, in particolare è connesso.

Poiché $G_1 - d$ non può essere isomorfo a $G_2 - G$ (il primo è sconnesso, il secondo è connesso) segue che G_1 non è isomorfo a G_2.

<u>Secondo modo</u>:

G_1 non è 2−connesso, perché $G_1 - d$ è sconnesso, come dimostrato già nel "primo modo".

Invece G_2 è 2−connesso, perché è hamiltoniano, infatti G_2 contiene il ciclo di lati

$$\{\ \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, E\}, \{E, F\}, \{F, A\}, \{A, G\}, \{B, G\}\ \}.$$

G_1 non è isomorfo a G_2, perché G_1 è 2−connesso mentre G_2 non lo è e la 2−connessione è una proprietà invariante per isomorfismi.

♣ Dimostriamo che $\boxed{G_2 \cong G_3}$ (G_2 è isomorfo a G_3):

Per definire un isomorfismo tra G_2 e G_3 diamo un'applicazione da V_2 in V_3 in modo opportuno: teniamo presente che la funzione è obbligata sui vertici di grado 2 e di grado 5 perché sono unici; per definire la funzione sugli altri vertici teniamo conto dei vertici adiacenti a questi due di grado minimo e massimo. Definiamo dunque la seguente applicazione

$$\begin{array}{rccc} f: & V_2 & \to & V_3 \\ & G & \mapsto & 7 \\ & F & \mapsto & 6 \\ & A & \mapsto & 1 \\ & B & \mapsto & 2 \\ & C & \mapsto & 3 \\ & D & \mapsto & 4 \\ & E & \mapsto & 5 \end{array}$$

La funzione f induce un isomorfismo tra i due grafi, infatti

a) f è biiettiva;

b) f definisce un morfismo di grafi, manda cioè lati in lati, infatti

$$\begin{array}{llll} f: & E_2 & \longrightarrow & E_3 \\ & \{G,A\} & \longmapsto & \{7,1\} \\ & \{G,B\} & \longmapsto & \{7,2\} \\ & \{G,C\} & \longmapsto & \{7,3\} \\ & \{G,D\} & \longmapsto & \{7,4\} \\ & \{G,E\} & \longmapsto & \{7,5\} \\ & \{A,F\} & \longmapsto & \{1,6\} \\ & \{A,B\} & \longmapsto & \{1,2\} \\ & \{B,C\} & \longmapsto & \{2,3\} \\ & \{C,D\} & \longmapsto & \{3,4\} \\ & \{D,E\} & \longmapsto & \{4,5\} \\ & \{E,F\} & \longmapsto & \{5,6\} \end{array}$$

c) tutti i lati in E_3 sono immagine di un lato di E_2 (si può verificare direttamente oppure si può dimostrare tenendo presente che $f : E_2 \to E_3$ è iniettiva e che $|E_2| = |E_3|$, avendo G_2 e G_3 lo stesso score).

♣ Infine, $\boxed{G_1 \ncong G_3}$ perché l'isomorfismo è una relazione di equivalenza tra i grafi.

2) *Es. n.6 del 19 giugno 2000*

Si dica, motivando la risposta, quali tra i seguenti grafi, G, G' e G'', sono tra loro isomorfi e quali no.

$G = (V, E)$ dove l'insieme dei vertici è

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

e l'insieme dei lati è

$$\begin{aligned} E = \{ & \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \\ & \{e,f\}, \{f,a\}, \{a,g\}, \{b,g\}, \\ & \{c,g\}, \{d,g\}, \{e,g\}, \{f,g\} \}. \end{aligned}$$

$G' = (V', E')$ dove l'insieme dei vertici è

$$V' = \{a', b', c', d', e', f', g'\}$$

e l'insieme dei lati è

$$\begin{aligned} E' = \{ \ & \{a', c'\}, \{c', e'\}, \{e', a'\}, \\ & \{b', d'\}, \{d', f'\}, \{f', b'\}, \\ & \{a', g'\}, \{b', g'\}, \{c', g'\}, \\ & \{d', g'\}, \{e', g'\}, \{f', g'\} \ \}. \end{aligned}$$

$G'' = (V'', E'')$ dove l'insieme dei vertici è

$$V'' = \{a'', b'', c'', d'', e'', f'', g''\}$$

e l'insieme dei lati è

$$\begin{aligned} E'' = \{ \ & \{a'', d''\}, \{a'', e''\}, \{d'', e''\}, \\ & \{a'', g''\}, \{e'', g''\}, \{d'', g''\}, \\ & \{b'', c''\}, \{b'', f''\}, \{c'', f''\}, \\ & \{b'', g''\}, \{c'', g''\}, \{f'', g''\} \ \}. \end{aligned}$$

<u>*Soluzione*</u>

Osserviamo anzitutto che i tre grafi hanno lo stesso score

$$d = (\underbrace{3, 3, 3, 3, 3, 3}_{6 \ volte}, 5)$$

quindi ancora non possiamo concludere.

♣ Dimostriamo che $\boxed{G \ncong G'}$ (G non è isomorfo a G'):

<u>*Primo modo*</u>*:*

Osserviamo che c'è un unico vertice di grado 6, per cui se esistesse un isomorfismo h tra G e G', necessariamente dovrebbe mandare il vertice di grado 6 di G nel vertice di grado 6 di G', ovvero $h(g) = g'$.

La funzione h indurrebbe un isomorfismo da $G - g$ in $G' - g'$. Proviamo che ciò non è possibile perché ci porta ad un assurdo, l'assurdo sarà dovuto al fatto di aver supposto G e G' isomorfi:

Il sottografo $G - g$ ha come vertici

$$\{a, b, c, d, e, f\}$$

e come lati

$$\begin{aligned} \{\ &\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \\ &\{d, e\}, \{e, f\}, \{f, a\}\ \} \end{aligned}$$

$G - g$ è pertanto un $6-$ciclo, in particolare è connesso.

Invece $G' - g'$ ha come vertici

$$\{a', b', c', d', e', f'\}$$

e come lati

$$\begin{aligned} \{\ &\{a', c'\}, \{c', e'\}, \{e', a'\}, \\ &\{b', d'\}, \{d', f'\}, \{f', b'\}\ \} \end{aligned}$$

$G' - g'$ è l'unione disgiunta di due $3-$cicli: uno di vertici $\{a', c', e'\}$, l'altro di vertici $\{b', d', f'\}$. In particolare $G' - g'$ è sconnesso, quindi non può essere isomorfo a $G - g$. La connessione, infatti, è una proprietà invariante per isomorfismi.

Quindi G e G' non sono isomorfi.

Secondo modo:

G è $2-$connesso, perché è hamiltoniano.

Infatti il ciclo di lati

$$\begin{aligned} \{\ &\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \\ &\{d, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, a\}\ \} \end{aligned}$$

è contenuto in G e passa per tutti i vertici di G.

G' invece non è $2-$connesso, perché $G' - g'$ è sconnesso, per quanto visto nel "primo modo".

Allora G e G' non sono isomorfi, perché la $2-$connessione è una proprietà invariante per isomorfismi.

♣ Anche $G'' - g''$ è sconnesso, quindi G'' non è $2-$connesso, pertanto $\boxed{G \not\cong G''}$.

♣ Analizziamo infine i grafi G' e G''.

Entrambi non sono $2-$connessi. Dimostriamo che $\boxed{G' \cong G''}$ (G' è isomorfo a G''):

Per definire un isomorfismo tra G' e G'' diamo un'applicazione h da V' in V'' in modo opportuno: la funzione h è obbligata sui vertici di grado 6, perché sono unici; per definire la funzione sugli altri vertici teniamo conto delle due componenti connesse che troviamo in $G' - g'$ e in $G'' - g''$.

Le componenti connesse di $G' - g'$ sono due $3-$cicli di vertici $\{a', c', e'\}$ e $\{b', d', f'\}$.

Le componenti connesse di $G'' - g''$ sono due $3-$cicli di vertici $\{a'', d'', e''\}$ e $\{b'', c'', f''\}$.

Definiamo dunque la seguente applicazione

$$
\begin{array}{rccc}
h: & V' & \rightarrow & V'' \\
 & g' & \mapsto & g'' \\
 & a' & \mapsto & a'' \\
 & e' & \mapsto & e'' \\
 & c' & \mapsto & d'' \\
 & b' & \mapsto & b'' \\
 & f' & \mapsto & f'' \\
 & d' & \mapsto & c''
\end{array}
$$

Verifichiamo che la funzione h induce un isomorfismo tra i grafi G' e G'':

a) h è biiettiva ($|V'| = |V''|$ e h è iniettiva);

b) h definisce un morfismo di grafi, manda cioè lati di G' in lati di G'', infatti

$$\begin{array}{rlcl} h: & E' & \longrightarrow & E'' \\ & \{a',c'\} & \longmapsto & \{a'',d''\} \\ & \{c',e'\} & \longmapsto & \{d'',e''\} \\ & \{e',a'\} & \longmapsto & \{e'',a''\} \\ & \{b',d'\} & \longmapsto & \{b'',c''\} \\ & \{d',f'\} & \longmapsto & \{c'',f''\} \\ & \{f',b'\} & \longmapsto & \{f'',b''\} \\ & \{a',g'\} & \longmapsto & \{a'',g''\} \\ & \{b',g'\} & \longmapsto & \{b'',g''\} \\ & \{c',g'\} & \longmapsto & \{d'',g''\} \\ & \{e',g'\} & \longmapsto & \{e'',g''\} \\ & \{f',g'\} & \longmapsto & \{f'',g''\} \end{array}$$

c) tutti i lati in E'' sono immagine di un lato di E' (si può verificare direttamente oppure si può dimostrare tenendo presente che $h : E' \to E''$ è iniettiva e che $|E'| = |E''|$, avendo G' e G'' lo stesso score).

3) *Es. n.5 del 17 settembre 2001*

Provare che i tre grafi G_1, G_2 e G_3 non sono a due a due isomorfi:

$G_1 = (V_1, E_1)$ dove l'insieme dei vertici è

$$V_1 = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

e l'insieme dei lati è

$$\begin{aligned} E_1 = \{ & \{A,B\}, \{B,C\}, \{C,D\}, \\ & \{D,E\}, \{E,F\}, \{F,A\}, \\ & \{B,G\}, \{D,G\}, \{F,G\} \}. \end{aligned}$$

$G_2 = (V_2, E_2)$ dove l'insieme dei vertici è

$$V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

e l'insieme dei lati è

$$\begin{aligned} E_2 = \{ \ & \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \\ & \{4,5\}, \{5,6\}, \{6,1\}, \\ & \{1,7\}, \{5,7\}, \{6,7\} \ \}. \end{aligned}$$

$G_3 = (V_3, E_3)$ dove l'insieme dei vertici è

$$V_3 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

e l'insieme dei lati è

$$\begin{aligned} E_3 = \{ \ & \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \\ & \{c,d\}, \\ & \{d,e\}, \{d,g\}, \{e,g\}, \\ & \{e,f\}, \{g,f\} \ \}. \end{aligned}$$

Soluzione

I tre grafi hanno lo stesso score

$$d = (2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$$

quindi ancora non possiamo concludere.

Primo modo:

G_1 NON ha $3-$cicli,

G_2 ha DUE $3-$cicli, di vertici rispettivamente:

$$\{1, 6, 7\} \qquad \text{e} \qquad \{5, 6, 7\}$$

G_3 ha TRE $3-$cicli, di vertici rispettivamente

$$\{a, b, c\}, \qquad \{d, e, g\} \qquad \text{e} \qquad \{e, f, g\}$$

Pertanto i tre grafi sono a due a due non isomorfi perché un isomorfismo di grafi manda $3-$cicli in $3-$cicli (più in generale, manda $k-$cicli in $k-$cicli) quindi il numero di $3-$cicli è un invariante per isomorfismi, ma i tre grafi G_1, G_2 e G_3 contengono un numero diverso di $3-$cicli.

<u>*Secondo modo:*</u>

♣ Dimostriamo che $\boxed{G_1 \not\cong G_2}$ (G_1 non è isomorfo a G_2) e che $\boxed{G_1 \not\cong G_3}$ (G_1 non è isomorfo a G_3):

Se esistesse un isomorfismo h di G_1 in G_2, in particolare manderebbe vertici di grado 2 in vertici di grado 2.

Se consideriamo $G_1 - A$ otteniamo un grafo di score

$$(2, 2, 2, 2, 3, 3)$$

Tenendo presente che $\deg(A) = 2$, $h(A)$ dovrebbe essere un vertice di grado 2 di G_2, quindi o 2 o 3 o 4. Ma sia $G_2 - 2$ che $G_2 - 4$ hanno score

$$(1, 2, 2, 2, 2, 3)$$

e $G_2 - 3$ ha score

$$(1, 1, 3, 3, 3, 3)$$

Dunque, G_1 non può essere isomorfo a G_2.

In maniera analoga si procede per G_1 e G_3: togliendo da G_3 un vertice di grado 2 (o a, o b oppure f) non si ottiene mai come score lo stesso score di $G_1 - A$.

Quindi G_1 non è isomorfo a G_3.

♣ Dimostriamo che $\boxed{G_2 \not\cong G_3}$ (G_2 non è isomorfo a G_3):

G_2 è hamiltoniano e quindi è $2-$connesso, infatti G_2 contiene il ciclo di lati

$$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 1\}\}$$

Invece G_3 non è $2-$connesso, inaftti $G_3 - c$ è sconnesso in due componenti di vertici

$$\{a, b\} \qquad \text{e} \qquad \{d, e, f, g\}$$

Perciò G_2 non è isomorfo a G_3, perché la $2-$connessione è una proprietà invariante per isomorfismi.